Momentenmethode im Simulationsverfahren

Lucas Böttcher

25. März 2012

Zu aller erst nur ein Beispiel aus Harringtons *Field Computation by Moment Methods*. Weitere Beschreibungen folgen später.

Inhaltsverzeichnis

1 Dünne Platte

Beispiel 1 (Dünne Platte)**.** *Man betrachte eine Platte vernachlässigbarer Dicke (z-Richtung) und einer x-,y-Ausdehnung von 2a, deren Zentrum sich im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems befinde. Die Ladungsflächendichte $\sigma(x, y)$ führt zum abgeleiteten Potenzial:*

$$\phi(x, y, z) = \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{\sigma(x', y')}{4\pi\epsilon R} dx'dy' \tag{1}$$

Die gesamte Platte befindet sich auf dem gleichen Potenzial $\phi = V$, womit gilt:

$$V = \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{\sigma(x', y')}{4\pi\epsilon R} dx'dy' \tag{2}$$

Für den Abstand R gilt: $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$. Ebenso ist die Kapaziztät der Platte von Interesse:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{1}{V} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \sigma(x', y') dx'dy' \tag{3}$$

Die Platte wird nun in N quadratische Segmente unterteilt. Die Funktion

$$f_n = \begin{cases} 1, \ \Delta s_n \\ 0, \ \Delta s_{m \neq n} \end{cases} \tag{4}$$

führt für die Ladungsdichte zur näherungsweisen Darstellung:

$$\sigma(x, y) \approx \sum_{n=1}^{N} \alpha_n f_n \tag{5}$$

Damit erhält man für das definierte Pontenzial:

$$V = \sum_{n=1}^{N} I_{mn} \alpha_n \tag{6}$$

mit $m \in \mathbb{N}$ und:

$$I_{mn} = \int_{\Delta x_n} \int_{\Delta y_n} \frac{1}{4\pi\epsilon\sqrt{(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2}} dx'dy' \tag{7}$$

Damit lässt sich näherungsweise auch für die Kapazität schreiben:

$$C \approx \frac{1}{V}\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Delta s_n = \sum_{mn} l_{mn}^{-1} \Delta s_n \tag{8}$$

Diese ersten Ergebnisse sollen jetzt mit geeigneten mathematischen Mitteln weiter verarbeitet werden, um die geforderten Resultate zu berechnen. Man definiert die zu betrachtende Funktion: $f(x,y) = \sigma(x,y)$ *und das Potenzial* $V = g(x,y)$ *für* $|x| < a, |y| < a$*. Das betrachtete Funktional erhält man durch:*

$$I(f) = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \frac{f(x',y')}{4\pi\epsilon\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} dx'dy' \tag{9}$$

Die Testfunktionen erhält man über die Delta-Distributionen:

$$w_m = \delta(x-x_m)\delta(y-y_m) \tag{10}$$

Man betrachtet mit dem definierten Funktional die Kapazität mit dem Skalarprodukt:

$$C = \frac{\langle \sigma, \phi \rangle}{V^2} \tag{11}$$

Man kann nun für die I_{mn} *nun schreiben:*

$$I_{mn} = \int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} \frac{1}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \tag{12}$$

$$I_{mn} \approx \frac{\Delta s_n}{4\pi\epsilon R_{mn}} = \frac{b^2}{\pi\epsilon\sqrt{(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2}} \tag{13}$$

Damit erhält man die geforderten Ergebnisse.