

I. Physikalisches Institut, Universität zu Köln

Fortgeschrittenenpraktikum

Mikrowellen-Radiometer

Norbert Braun
Sabrina Gärtner
Volker Lutter
Jean-Marc Régis

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Heterodyn-Radiometer	3
2.2	Lokalszillator	3
2.2.1	Reflexklystron	3
2.2.2	Wanderfeldröhre	4
2.2.3	Gunn-Diode	4
2.2.4	Vervielfacher	5
2.3	Mischer	5
2.3.1	Schottky-Diode	6
2.3.2	SIS-Mischer	6
2.3.3	Quantenmischer	7
2.4	Rauschen	7
2.5	Nyquist-Formel für die thermische Rauschleistung	8
2.6	Rauschleistung	10
2.7	Thermische Strahlung des Schwarzen Körpers	11
2.7.1	Planck'sches Strahlungsgesetz	11
2.7.2	Spezifische Intensität	12
2.7.3	Strahlungsflussdichte	13
2.7.4	Rayleigh-Jeans-Gesetz und Wien'sches Strahlungsgesetz	13
2.7.5	Wien'sches Verschiebungsgesetz	14
2.7.6	Stefan-Boltzmann-Gesetz	15
2.8	Hot-Cold-Methode	15
2.9	Gesamtrauschtemperatur einer Verstärkerkette	16
2.10	Radiometerformel	17
3	Auswertung	18
3.1	Kalibration des variablen Dämpfungsglieds	18
3.2	Bestimmung der Empfängerrauschtemperatur	19
3.3	Bestimmung der ZF-Rauschtemperatur	22
3.4	Bestimmung des Mischverlusts L	24
3.5	Bestimmung der Empfängerrauschtemperatur mit Hornantenne und Abschlußwiderstand	26
4	Anhang	28
4.1	Rechnung für die Mischerformel	28

1 Einleitung

In diesem Versuch werden Messungen an einem passiven Mikrowellen-Radiometer durchgeführt. Ein Mikrowellen-Radiometer ist ein System zur Detektion von elektromagnetischer Strahlung mit Wellenlängen in der Größenordnung 1 mm, d.h. Frequenzen im Bereich von 300 GHz. Ziel ist die Messung von Rauschleistungen. Zum Nachweis der relativ hohen Frequenzen wird im Radiometer ein sog. Heterodyn-Empfänger verwendet.

2 Theoretische Grundlagen

Man unterscheidet generell zwischen aktiver und passiver Radiometrie. Bei der aktiven Radiometrie (z.B. Radar) wird ein Signal ausgesendet und vom zu beobachtenden Objekt reflektiert, wobei man aus dem Reflektionsverhalten Rückschlüsse über das Objekt ziehen kann. Im Gegensatz dazu wird bei der passiven Radiometrie die vom Objekt ausgesendete Radiostrahlung detektiert. Ein passives Radiometer besteht nur aus einem Empfangsteil, der allerdings für typische Anwendungen sehr empfindlich sein muss. Im Rahmen des vorliegenden Versuchs wird ein passives Radiometer verwendet.

2.1 Heterodyn-Radiometer

Um die üblicherweise sehr schwachen Signale, die bei der passiven Radiometrie empfangen werden, detektieren zu können, müssen sie zunächst geeignet verstärkt werden. Das Problem ist allerdings, dass bei den benötigten hohen Verstärkungen leicht Rückkopplungseffekte auftreten; außerdem stehen für Frequenzen oberhalb von ca. 100 GHz derzeit keine ausreichend rauscharmen Verstärker zur Verfügung.

Andererseits ist es aber möglich, Signale entsprechender Frequenz im Empfänger zu erzeugen. Mischt man nun das empfangene Signal (Frequenz ν_{HF}) mit einem lokal erzeugten Signal von geringfügig verschiedener Frequenz ν_{LO} , so erhält man ein Signal mit einer Zwischenfrequenz $\nu_{ZF} = \nu_{HF} - \nu_{LO}$. Dieses Signal kann aufgrund seiner geringeren Frequenz dann wesentlich einfacher gefiltert, verstärkt und detektiert werden. Dieses Verfahren bezeichnet man als Heterodynverfahren.

Ein weiterer Vorteil ist, dass man einen solchen Empfänger zum Empfang von Signalen vieler verschiedener Frequenzen nutzen kann. Dazu muss lediglich der Lokaloszillator angepasst werden.

2.2 Lokaloszillator

Im folgenden sollen einige häufiger verwendete Typen von Lokaloszillatoren vorgestellt werden.

2.2.1 Reflexklystron

Das Reflexklystron basiert auf der Wechselwirkung zwischen einem Elektronenstrahl und einem elektromagnetischen Feld. Dabei wird zunächst ein Elektronenstrahl erzeugt

und in einen Resonator geleitet, in dem das elektromagnetische Feld schwingt. Das Feld erzeugt eine Geschwindigkeitsmodulation der Elektronen, die nach einiger Zeit zu einer Dichtemodulation wird. Es bilden sich also Elektronenpakete. Nach dem Verlassen des Resonators werden sie in diesen zurückreflektiert. Wenn das System richtig abgestimmt ist, so kommt es zu einer Rückkopplung, d.h. die reflektierten Elektronen verstärken nun ihrerseits das Feld im Resonator. Ein Teil des Feldes kann nun aus dem Resonator ausgekoppelt werden und steht für die gewünschte Anwendung zur Verfügung.

Ein Vorteil des Reflexklystrons ist, dass sich relativ hohe Ausgangsleistungen erzielen lassen. Dem steht der Nachteil gegenüber, dass die Schwingungsfrequenz durch die mechanischen Dimensionen des Resonators und somit häufig schon bei der Produktion festgelegt ist. Reflexklystrons können zur Erzeugung von Frequenzen bis etwa 250 GHz eingesetzt werden.

2.2.2 Wanderfeldröhre

Auch bei der Wanderfeldröhre wird die Wechselwirkung zwischen einem Elektronenstrahl und einem elektromagnetischen Feld ausgenutzt. Dazu wird der Elektronenstrahl durch eine Helix-Wendel geleitet, auf der ein Hochfrequenzsignal anliegt. Dieses Signal breitet sich zwar mit Lichtgeschwindigkeit aus, durch die Wendel wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Richtung des Elektronenstrahls jedoch soweit reduziert, dass sie mit der Geschwindigkeit der Elektronen vergleichbar wird. Durch die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und dem elektromagnetischen Feld der Wendel gleichen sich die Wellenfronten an. Anschließend werden die Elektronen an einem Kollektor aufgefangen. Somit erreicht man eine Verstärkung des Hochfrequenzsignals.

Durch Rückkopplung des verstärkten Signals kann man die Wanderfeldröhre nun als Oszillator verwenden. Man erzielt höhere Frequenzen als beim Reflexklystron, allerdings bei geringerer Ausgangsleistung.

2.2.3 Gunn-Diode

Im Gegensatz zu einer "normalen" Diode, die ja aus p- und n-dotiertem Halbleitermaterial besteht, ist die Gunn-Diode ausschließlich auch n-dotiertem Material aufgebaut. Dabei befindet sich eine dünne niedrigdotierte Schicht zwischen zwei hochdotierten Schichten, die mit den Anschlüssen der Diode verbunden sind.

Unter bestimmten Umständen sinkt nun die Beweglichkeit der Elektronen im Halbleiterkristall mit steigender Feldstärke. Dieser sogenannte negative differentielle Widerstand, also ein Bereich der Kennlinie mit negativer Steigung, wirkt wie eine Art Falle für die Elektronen und führt unter Umständen dazu, dass diese sich aufstauen und in Schüben durch den Kristall wandern. Wenn v die Driftgeschwindigkeit der Elektronen und d die Dicke der Schicht ist, in der der Effekt auftritt, so erzeugt man eine Wechselspannung mit einer Frequenz $\nu \approx v/d$. Um die für hohe Frequenzen notwendigen dünnen Schichten zu erzeugen, werden Epitaxieverfahren eingesetzt.

Mit Gunn-Dioden aus Galliumarsenid können Frequenzen bis 200 GHz erreicht werden; mit Galliumnitrid kommt man bis 3 THz.

2.2.4 Vervielfacher

Ein elektrisches Bauteil mit nichtlinearer Strom-Spannungs-Kennlinie produziert beim Anlegen einer sinusförmigen Wechselspannung Verzerrungen, die sich als Auftreten von höheren Harmonischen der Eingangsfrequenz auffassen lassen. Dies kann man nutzen, um höhere Frequenzen aus einer niedrigeren zu erzeugen.

Leider wird die Ausgangsleistung zu den höheren Harmonischen hin rasch immer geringer, so dass in der Praxis maximal die dritte Harmonische verwendet wird. Man kann so Lokaloszillatoren bis ca. 300 GHz realisieren.

Als nichtlineare Bauelemente werden zum Beispiel Schottky-Dioden verwendet. Vor dem Vervielfacher plziert man einen Tiefpassfilter, der ein Eindringen der vervielfachten Frequenz in die Schaltung, welche die ursprüngliche Schwingung erzeugt, vermeidet.

2.3 Mischer

Nach dem Lokaloszillator ist der Mischer das zweite wesentliche Bauteil eine Heterodyn-Empfängers. Im Prinzip kann jedes Bauteil mit nichtlinearer Strom-Spannungs-Kennlinie als Mischer verwendet werden.

Es sei nun $I(U)$ die Strom-Spannungs-Kennlinie des Bauelements. Wir nehmen an, dass U sich aus einem Gleichspannungsanteil U_0 und einer Wechselspannung δU zusammensetzt. δU setzt sich zusammen aus dem empfangenen Signal und der Schwingung des Lokaloszillators, also

$$\delta U = A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_S t)$$

Unter der Annahme, dass δU klein ist, können wir $I(U)$ nun um U_0 in eine Taylorreihe entwickeln. Damit erhalten wir

$$I(U_0 + \delta U) = k_0 + k_1 \delta U + k_2 (\delta U)^2 + \mathcal{O}((\delta U)^3)$$

wobei wir die Abkürzungen $k_0 := I(U_0)$ und $k_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dU^n} I(U) \Big|_{U_0}$ eingeführt haben. Nach einer länglichen, aber elementaren Rechnung (siehe Anhang) erhält man

$$\begin{aligned} I(U) &= k_0 + k_1 (A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_S t)) \\ &+ k_2 \left(\frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(2\omega_{LO}t) + \frac{B^2}{2} \cos(2\omega_S t) \right) \\ &+ k_2 AB \cos((\omega_{LO} - \omega_S)t) - k_2 AB \cos((\omega_{LO} + \omega_S)t) + \mathcal{O}(\delta U^3) \end{aligned}$$

Dabei ist $k_0 + k_2 \frac{A^2 + B^2}{2}$ ein Gleichstromanteil, $k_1 (A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_S t))$ sind die ursprünglichen Frequenzen, $k_2 \left(\frac{A^2}{2} \cos(2\omega_{LO}t) + \frac{B^2}{2} \cos(2\omega_S t) \right)$ sind höhere Harmonische der ursprünglichen Frequenzen und $-k_2 AB \cos((\omega_{LO} + \omega_S)t)$ ist die Summenfrequenz. Für die Anwendung als Mischer ist die Differenzfrequenz $k_2 AB \cos((\omega_{LO} - \omega_S)t)$ von Bedeutung, denn, wenn ω_{LO} und ω_S hinreichend nahe beieinander liegen, ist sie klein genug, um mit vertretbarem Aufwand weiterverstärkt und schließlich detektiert zu werden.

Wir wollen nun einige Bauelemente vorstellen, die als Mischer in Frage kommen.

2.3.1 Schottky-Diode

Während eine normale Diode einen Übergang zwischen p- und n-dotiertem Halbleitermaterial verwendet, besteht eine Schottky-Diode aus einem Übergang zwischen n-dotiertem Silizium (oder einem anderen Halbleiter) und einem Metall. Dieser Übergang besitzt ebenfalls gleichrichtende Eigenschaften, ist aber schneller. Dadurch eignet sich die Schottky-Diode für die Hochfrequenz-Technik.

Die Funktion der Schottky-Diode beruht, genauso wie bei der normalen Diode, auf einer elektronenverarmten Sperrschicht. Diese bildet sich, weil Elektronen leichter aus n-Silizium in die Metallschicht gelangen können als umgekehrt. Die höhere Geschwindigkeit der Schottky-Diode beruht nun darauf, dass der Ladungstransport ausschließlich durch Elektronen erfolgt, die sich schneller bewegen können als die bei der normalen Diode ebenfalls teilnehmenden Löcher. Ein weiterer Unterschied ist, dass die Schottky-Diode einen viel geringeren Widerstand in Durchlassrichtung aufweist als eine normale Diode.

Die Strom-Spannungs-Charakteristik der Schottky-Diode kann näherungsweise beschrieben werden durch

$$I = I_S \left(e^{\frac{eU}{\mu k_B T}} - 1 \right)$$

wobei I_S der sogenannte Sperrsättigungstrom, T die Temperatur, U die angelegte Spannung und μ ein temperaturabhängiger Korrekturfaktor ist. Man erkennt insbesondere den stark nichtlinearen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung, der die Verwendung der Schottky-Diode als Mischer gestattet.

Die Sperrschicht einer Diode stellt in Sperrrichtung eine Kapazität dar, so dass Wechselspannungen die Diode auch in Sperrrichtung passieren können. Bei der Anwendung als Mischer sorgt dies für Verluste. Um sie möglichst klein zu halten, möchte man die Kapazität der Sperrschicht minimieren. Dies erreicht man unter anderem durch Verkleinerung der Fläche des Kontaktes.

2.3.2 SIS-Mischer

Der SIS-Mischer besteht aus einem Supraleiter-Isolator-Supraleiter-Übergang. Seine Funktionsweise basiert, wie im Folgenden erläutert, auf dem Josephson-Effekt. Im Supraleiter wird der Strom nicht von einzelnen Elektronen, sondern von Cooper-Paaren getragen, die bei niedrigen Temperaturen in einem gewissen Sinne kondensieren und sich dann verlustfrei durch den Leiter bewegen können. Die Isolatorschicht können sie klassisch nicht überwinden. Ist die Schicht jedoch dünn genug, so können einzelne Cooper-Paare hindurchtunneln.

Schickt man nun einen geringen Strom durch den Übergang, so verhält er sich wie ein ununterbrochener Supraleiter, da die Anzahl der tunnelnden Cooper-Paare für den Stromfluss ausreicht. Erhöht man nun den Stromfluss, so kommt es irgendwann zum Aufbrechen der Cooper-Paare und zum Tunneln von Einzelelektronen. Die Einzelelektronen können sich allerdings nicht mehr verlustfrei durch den Supraleiter bewegen, so dass am Übergang nun eine Spannung abfällt.

Wird der SIS-Mischer nun in der Nähe des kritischen Stroms betrieben, so erhält man ein Bauelement mit einer extrem nichtlinearen Strom-Spannungs-Kennlinie, welches gut

als Mischer geeignet ist. Offenbar muss der SIS-Mischer bei einer Temperatur betrieben werden, die unter der Sprungtemperatur der verwendeten Supraleiter liegt. Für die Anwendung als Mischer hat dies den zusätzlichen Vorteil, dass das thermische Rauschen stark reduziert wird.

2.3.3 Quantenmischer

Ein Quantenmischer ist ein Mischer, dessen Rauschen nur noch durch unvermeidbare Quanteneffekte verursacht wird. Für seine Rauschtemperatur (siehe unten) gilt

$$T = \frac{h\nu}{k_B}$$

2.4 Rauschen

Bei der Verarbeitung elektrischer Signale tritt notwendigerweise *Rauschen* auf. Unter diesem Begriff fasst man alle unerwünschten Störungen des Signals zusammen. Ein Teil des Rauschens wird durch äußere Einflüsse verursacht, zum Beispiel wenn die Messapparatur elektromagnetische Wellen aus dem Umfeld auffängt. Dieses Rauschen kann durch eine geeignete Abschirmung der Messapparatur bekämpft werden. Schlimmer ist das Rauschen, was aus der Apparatur selbst kommt.

Je nach Frequenzspektrum unterscheidet man zwischen *white noise* (weißes Rauschen) und *pink noise* (rosa Rauschen oder $1/f$ -Rauschen). Beim weißen Rauschen liegt keine Frequenzabhängigkeit vor, d.h. die Rauschintensität ist für alle Frequenzen gleich. Beim rosa Rauschen ist die Rauschleistung proportional zum Inversen der Frequenz, $1/f$. Daher ist diese Art des Rauschens vor allem für niedrige Frequenzen von Belang. Zumindest im Englischen gibt es auch noch Rauschen diverser anderer „Farben“, etwa *brown noise* mit einer Frequenzabhängigkeit wie $1/f^2$ oder *blue noise* mit einer zur Frequenz proportionalen Rauschleistung (dies kann natürlich nicht bis zu beliebig hohen Frequenzen gelten).

Das Rauschen innerhalb der Apparatur wird im wesentlichen durch zwei Faktoren verursacht. Das sog. *thermische Rauschen* entsteht durch die statistische Bewegung der Ladungsträger bei endlicher Temperatur. So wird beispielsweise durch einen Widerstand bei genauerer Betrachtung kein konstanter Strom fließen, sondern der Stromfluss wird statistisch schwanken. Diese Form des Rauschens ist prinzipiell unvermeidlich und lässt sich nur durch eine Verringerung der Temperatur bekämpfen. Es handelt sich um weißes Rauschen. Für die weiteren Betrachtungen ist es manchmal nützlich, sich ein reales Bauelement als eine Kombination aus einem idealen Bauelement und einer parallelgeschalteten Spannungsquelle, die die Rauschspannung liefert, sowie einer in Serie geschalteten Stromquelle, die den Rauschstrom liefert, vorzustellen.

Den zweite Anteil am inneren Rauschen stellt das sog. *Schrotrauschen* dar, welches durch die Teilchennatur der Ladungsträger verursacht wird. Diese hat zur Folge, dass ein Stromfluss nicht kontinuierlich erfolgen kann, sondern immer nur in ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung. Auch beim Schrotrauschen handelt es sich um weißes Rauschen.

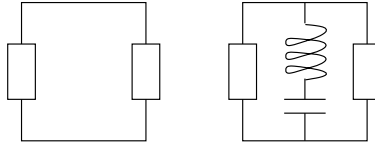


Abbildung 1: Zur Herleitung der Nyquist-Formel

Das rosa Rauschen ist bei Halbleiterelementen auf Oberflächen- und Grenzflächen-Effekte zurückzuführen und kann durch eine geeignete Oberflächenbehandlung minimiert werden. Interessanterweise ist derzeit keine untere Grenzfrequenz für rosa Rauschen in elektronischen Bauelementen bekannt, abgesehen von der offensichtlichen Beschränkung durch die Dauer der Messung (untere Grenzfrequenz $f_1 = \frac{1}{T}$).

2.5 Nyquist-Formel für die thermische Rauschleistung

Wir wollen nun eine Formel für die thermische Rauschleistung eines Bauteils herleiten. Wir zeigen zunächst, dass die Rauschleistung eines beliebigen Bauelements maximal von seinem Widerstand R , seiner Temperatur T und der Frequenz ν abhängen kann. Dazu schalten wir zwei Bauelemente mit gleichem Widerstand und gleicher Temperatur parallel zueinander, wie in Abb. 1 links gezeigt. Der vom ersten Bauteil erzeugte Rauschstrom dissipiert eine gewisse Leistung im Zweiten und umgekehrt. Diese Leistungen müssen nun (im Mittel) gleich sein, dann andernfalls würde Energie von einem zum anderen Bauteil fließen, obwohl sie gleiche Temperatur haben, im Widerspruch zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.

Mit einem ähnlichen Argument können wir uns nun auch davon überzeugen, dass die spektrale Verteilung der Rauschleistung bei den beiden Bauelementen gleich sein muss. Wenn nämlich zum Beispiel bei einer bestimmten Frequenz ν die Rauschleistung pro Frequenzeinheit des ersten Bauelementes größer wäre als die des zweiten, so könnte man durch Serienschaltung eines LC-Glieds mit Resonanzfrequenz ν (Abb. 1 rechts) wiederum dafür sorgen, dass (im Mittel) Energie von dem einen zum anderen Bauelement transportiert wird. Da sich die beiden Bauteile im thermischen Gleichgewicht befinden sollen, wäre dies wiederum ein Verstoß gegen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.

Wir wollen nun also eine konkrete Formel für die Rauschleistung in Abhängigkeit von der Temperatur T , dem Widerstand R und der Frequenz ν erhalten. Dazu betrachten wir einen eindimensionalen Wellenleiter der Länge L , der an beiden Enden so terminiert ist, dass keine Reflektionen auftreten, d.h. der Abschlusswiderstand entspricht der Impedanz des Leiters. Ferner wollen wir ohmsche Verluste vernachlässigen.

Wir betrachten nun eine harmonische Welle $\phi(x, t)$. Die Terminierung erzwingt $\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0$ für alle t . Dies führt dazu, dass nur diskrete Wellenzahlen $k = \frac{\pi}{L}n$, $n \in \mathbb{N}$, auftreten können. Die Anzahl dieser Moden, die ins Frequenzintervall $[\omega, \omega + \delta\omega]$ fallen, ist dann (für kleine $\delta\omega$) gleich $\frac{dn}{d\omega}$, und für die Anzahl der Moden pro Länge und pro

Frequenz gilt folglich

$$N(\omega) = \frac{1}{L} \frac{dn}{d\omega} = \frac{1}{L} \frac{dn}{dk} \frac{dk}{d\omega}$$

$\frac{dk}{d\omega}$ ist einfach die Geschwindigkeit v , mit der sich die Wellen im Wellenleiter ausbreiten. Damit gilt:

$$N(\omega) = \frac{1}{\pi v}$$

Nach dem Äquipartitionstheorem der Thermodynamik trägt jeder Freiheitsgrad im Mittel die Energie $\frac{1}{2}k_B T$. Da bei einer elektromagnetischen Welle sowohl vom elektrischen als auch vom magnetischen Freiheitsgrad ein Beitrag kommt (oder präziser: da elektrisches und magnetisches Feld jeweils quadratisch in der Hamiltonfunktion auftauchen), sollte jede Mode die mittlere Energie $\langle E \rangle(\omega) = k_B T$ haben. (Größen, die eine Zeitmitteilung beinhalten, werden wir in diesem Abschnitt in spitze Klammern einschließen.) Es ist natürlich klar, dass dies nicht bis zu beliebig hohen Frequenzen richtig sein kann, denn ansonsten wäre die Energie im Wellenleiter unendlich groß. Tatsächlich führen bei hinreichend hohen Frequenzen Quanteneffekte zu einer Abweichung von dieser Relation. Wir werden weiter unten noch einmal kurz darauf zurück kommen.

Die Energiedichte im Wellenleiter (Energie pro Frequenz und Länge) ergibt sich nun zu

$$\langle \epsilon \rangle(\omega) = k_B T N(\omega) = \frac{k_B T}{\pi v}$$

Die im Terminator dissipierte Energie pro Frequenz ist nun gegeben durch die Energiedichte (pro Frequenz und Längeneinheit) mal der Geschwindigkeit, mit der die Wellen im Wellenleiter propagieren, also

$$\langle P \rangle(\omega) = v \bar{\epsilon}(\omega) = \frac{1}{\pi} k_B T$$

Für die Spannung U , die am Terminatorwiderstand anliegen muss, damit diese Leistung dissipiert wird, erhält man

$$P = \frac{U^2}{2R} \rightarrow U^2 = 2RP$$

(der Faktor 2 kommt daher, dass beide Enden des Wellenleiters terminiert sind). Also erhält man für die mittlere quadratische Spannung pro Frequenz

$$\langle u^2 \rangle = \frac{2Rk_B T}{\pi}$$

Man beachte, dass der Ausdruck von der Frequenz nicht abhängt. Integration über einen Frequenzbereich $\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ liefert daher einfach

$$\langle U^2 \rangle = 4Rk_B T \Delta\nu$$

Die quantenmechanisch korrekte Formel, die wir hier nicht herleiten können, lautet:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{4R\hbar\nu}{e^{\hbar\nu/k_B T} - 1}$$

Im Falle $h\nu \ll k_B T$ erhalten wir durch eine Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion unsere ursprüngliche Formel zurück. Die Grenzfrequenz, ab der die Quanteneffekte nicht mehr vernachlässigt werden können, ergibt sich zu $\frac{k_B T}{h} \approx 6 \cdot 10^{12}$ Hz bei Raumtemperatur ($k_B T = 25$ meV). Für unsere Zwecke ist die klassische Formel also ausreichend.

2.6 Rauschleistung

Wir wollen nun verstehen, welche Leistung von einem rauschenden Widerstand R_R in einem Lastwiderstand R_L dissipiert wird. Der rauschende Widerstand lässt sich als Hintereinanderschaltung einer Rauschspannungsquelle und eines rauschfreien Widerstands auffassen. Nach dem vorherigen Abschnitt wissen wir, dass für die mittlere quadratische Spannung $\langle U^2 \rangle$ der Rauschquelle gilt:

$$\langle U^2 \rangle = 4R_R k_B T \Delta\nu$$

Werden die Enden des rauschenden Widerstands durch den Lastwiderstand verbunden, so führt diese Spannung zu einem mittleren quadratischen Strom $\langle I^2 \rangle$, der gegeben ist durch

$$I = \frac{U}{R} \Rightarrow \langle I^2 \rangle = \frac{\langle U^2 \rangle}{(R_R + R_L)^2}$$

Dieser Strom dissipiert im Lastwiderstand eine mittlere Leistung $\langle P \rangle$ mit

$$P = RI^2 \Rightarrow \langle P \rangle = R_L \langle I^2 \rangle = \frac{R_L}{(R_R + R_L)^2} \langle U^2 \rangle$$

Wir können nun berechnen, bei welchem Wert des Lastwiderstands die in diesem dissipierte Leistung maximal wird. Dazu bilden wir zunächst die Ableitung nach R_L und erhalten

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{(R_R + R_L)^2 - 2(R_R + R_L)R_L}{(R_R + R_L)^4} = \frac{R_L - R_R}{(R_R + R_L)^3}$$

Offenbar ist $\frac{dP}{dR_L} = 0$ für $R_R = R_L$. Da $P \rightarrow 0$ sowohl für $R_L \rightarrow 0$ als auch für $R_L \rightarrow \infty$, muss es sich dabei um ein Maximum handeln. Die übertragene Leistung ist also maximal für $R_R = R_L$. Man spricht auch von optimaler Anpassung.

Für optimale Anpassung erhalten wir

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4R_R} \langle U^2 \rangle$$

und unter Verwendung der oben angegebenen Formel für $\langle U^2 \rangle$ gilt

$$\langle P \rangle = k_B T \Delta\nu$$

Diese Formel erlaubt es, einer Rauschleistung eine Rauschtemperatur zuzuordnen.

2.7 Thermische Strahlung des Schwarzen Körpers

Unter einem schwarzen Körper versteht man ein Objekt, welches auftreffende elektromagnetische Strahlung, egal welcher Wellenlänge, vollständig absorbiert — im Gegensatz zu den meisten realen Körpern, die einen Teil der Strahlung reflektieren, wobei die Abhängigkeit des Reflektionsgrades von der Wellenlänge im Allgemeinen kompliziert ist.

Es ist nun so, dass alle Körper endlicher Temperatur auch elektromagnetische Strahlung emittieren. Man kann sich nach Kirchhoff überlegen, dass der Emissionsgrad gleich dem Absorptionsgrad ist (andernfalls ließe sich ein Verstoß gegen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik konstruieren). Ein Körper, der auftreffende elektromagnetische Strahlung *nicht* absorbiert, wird daher auch bei hoher Temperatur keine Strahlung aussenden. (Eine heiße Gasflamme ist fast unsichtbar. Eine Kerzenflamme hingegen enthält große Mengen heißer Rußpartikel und leuchtet deshalb.) Bei einem allgemeinen Körper mit kompliziertem Absorptionsspektrum wird auch das Emissionsspektrum kompliziert sein. Diese Komplikationen entfallen beim schwarzen Körper; sein Emissionsspektrum wird ausschließlich von sehr allgemeinen Prinzipien bestimmt, die im Folgenden kurz erläutert werden sollen.

2.7.1 Planck'sches Strahlungsgesetz

Wir betrachten zunächst elektromagnetische Strahlung in einem Hohlraum. Im thermischen Gleichgewicht hängen die Eigenschaften dieser Strahlung nur von der Temperatur T ab. Man kann sich überlegen, dass dies genau die Strahlung ist, die ein schwarzer Körper der Temperatur T aussenden würde. Wir suchen nun nach einem Ausdruck für die spektrale Energiedichte u , also die Energie der Strahlung pro Volumeneinheit und pro Frequenzintervall (SI-Einheit von u : $\text{Jm}^{-3}\text{Hz}^{-1}$). Geht man davon aus, dass alle erlaubten Schwingungsmoden der elektromagnetischen Strahlung im Hohlraum nach dem Äquipartitionstheorem die mittlere Energie $k_B T$ tragen, so erhält man einen Ausdruck für die spektrale Energiedichte, der als *Rayleigh-Jeans-Gesetz* bekannt ist. Da die Anzahl der erlaubten Schwingungsmoden zu hohen Frequenzen hin jedoch zunimmt, führt das Rayleigh-Jeans-Gesetz zu der absurden Konsequenz einer unendlich hohen Energiedichte im Hohlraum (UV-Katastrophe). Auch experimentell zeigt sich, dass das Rayleigh-Jeans-Gesetz bei hohen Frequenzen nicht mehr gültig ist.

Max Planck fand mit dem *Planck'schen Strahlungsgesetz* zunächst empirisch eine Formel, die das Schwarzkörperspektrum über den gesamten Frequenzbereich korrekt beschreibt. Er konnte diese Formel schließlich erklären, indem er annahm, dass die Energie einer Schwingungsmode immer ein ganzzahliges Vielfaches von $h\nu$ sein müsse. Dabei ist ν die Frequenz der entsprechenden Schwingungsmode und h eine Größe, die heute Planck zu Ehren als *Planck'sches Wirkungsquantum* bezeichnet wird. Dieses Ergebnis gilt als die Geburtsstunde der Quantenmechanik.

Eine moderne Herleitung des *Planck'schen Strahlungsgesetzes* betrachtet ein Photongas, also ein nichtwechselwirkendes, ultrarelativistisches Bosonengas, bei einer bestimmten Temperatur und berechnet die Energiedichte mit Hilfe der Quantenstatistik.

(Details finden sich in fast jedem Buch über statistische Physik.) Man erhält so:

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$$

Man kann die Energiedichte natürlich auch als Funktion der Wellenlänge λ angeben (SI-Einheit ist dann $\text{Jm}^{-3}\text{m}^{-1}$). Mit Hilfe der Beziehungen $\lambda = \frac{c}{\nu}$ und $|d\lambda| = \frac{c}{\nu^2} |d\nu|$ kann man die beiden Varianten ineinander umrechnen.

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda$$

2.7.2 Spezifische Intensität

Als spezifische Intensität L bezeichnet man die Strahlungsenergie, die pro Zeiteinheit, pro Flächeneinheit und pro Raumwinkeleinheit eine gegebene Fläche in einer bestimmten Richtung durchströmt bzw. von einer gegebenen Fläche in eine gegebene Richtung absorbiert oder emittiert wird.

$$L = \frac{1}{\cos\theta} \frac{d^3Q}{dt dA d\Omega}$$

Dabei ist Q die Strahlungsenergie, t die Zeit, A die Fläche, Ω der Raumwinkel und θ der Winkel zwischen der betrachteten Richtung und der Normale der betrachteten Fläche. Das Flächenelement $\cos\theta dA$ misst hier nicht die Fläche, durch die die Strahlen hindurchgehen, sondern die Projektion dieser Fläche auf die Richtung der Strahlen. Die SI-Einheit der spezifischen Intensität ist $\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}$.

Einen strahlenden Körper, der in alle Richtungen gleich stark strahlt, nennt man einen *Lambert-Strahler*. Natürlich wird auch hier ein Raumwinkelelement fernab von der Normalenrichtung weniger Strahlung abbekommen, da es effektiv weniger von der emittierenden Fläche sieht. Diese triviale Richtungsabhängigkeit wird durch den Faktor $\frac{1}{\cos\theta}$ gerade kompensiert, so dass die spezifische Intensität für einen Lambert-Strahler tatsächlich isotrop ist, also nicht von der Richtung abhängt.

Man kann ferner die spektrale spezifische Intensität L_ν definieren als die spezifische Intensität pro Frequenzintervall, in einem bestimmten Frequenzintervall $[\nu, \nu + d\nu]$:

$$L_\nu = \frac{dL}{d\nu}$$

Die SI-Einheit der spektralen spezifischen Intensität ist $\text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$. Aus dem oben angegebenen Ausdruck für die spektrale Energiedichte der Hohlraumstrahlung erhält man mit einigen Überlegungen, die wir hier nicht reproduzieren wollen, für die spektrale spezifische Intensität eines schwarzen Körpers den Ausdruck

$$L_\nu d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$$

Man kann die spektrale spezifische Intensität natürlich auch wieder pro Wellenlängenintervall angeben. Sie hat dann die SI-Einheit $\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{m}^{-1}$.

$$L_\lambda d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda$$

2.7.3 Strahlungsflussdichte

Die Strahlungsflussdichte M ist die Strahlungsenergie, die pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit durch eine gegebene Fläche strömt bzw. von dieser emittiert oder absorbiert wird. Sie ergibt sich durch Integration der spezifischen Intensität über einen Halbraum.

$$M = \frac{dQ}{dt dA} = \int_{\text{Halbraum}} d\Omega L \cos \theta$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen der Flächennormalen und dem Raumwinkelement. Der Faktor $\cos \theta$ berücksichtigt wieder den Umstand, dass Raumwinkelemente fernab der Normalen weniger von der Fläche sehen als solche in Normalenrichtung. Wir hatten diesen Faktor für die spezifische Intensität explizit abdividiert und müssen ihn nun wieder hinzufügen. Die SI-Einheit der Strahlungsflussdichte ist Wm^{-2} .

Wenn die spezifische Intensität isotrop ist, so kann man das Integral ausführen und erhält

$$M = \int_{\text{Halbraum}} d\Omega L \cos \theta = L \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta = 2\pi L \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta = \pi L$$

Dabei wurde im ersten Schritt das Raumwinkelement $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ eingesetzt und im dritten Schritt das θ -Integral ausgewertet:

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cos(2\theta) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}((-1) - 1) = \frac{1}{2}$$

Man kann auch die spektrale Strahlungsflussdichte, also die Strahlungsflussdichte pro Frequenzeinheit in einem Frequenzintervall, einführen: $M_\nu = \frac{dM}{d\nu}$ (SI-Einheit: $\text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$). Natürlich kann man die spektrale Strahlungsflussdichte auch wieder auf ein Wellenlängenintervall beziehen: $M_\lambda = \frac{dM}{d\lambda}$ (SI-Einheit: $\text{Wm}^{-2}\text{m}^{-1}$). Nutzt man aus, dass die Strahlung eines schwarzen Körpers isotrop ist, so kann man die spektrale Strahlungsflussdichte, die von diesem ausgeht, leicht bestimmen.

$$M_\nu d\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$$

$$M_\lambda d\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda$$

2.7.4 Rayleigh-Jeans-Gesetz und Wien'sches Strahlungsgesetz

Für $h\nu \ll k_B T$ kann man die Exponentialfunktion im Nenner des Planck'schen Strahlungsgesetzes Taylor-entwickeln und erhält in erster Ordnung das *Rayleigh-Jeans-Gesetz*.

$$M_\nu d\nu = 2\pi k_B T \frac{\nu^2}{c^2} d\nu$$

Weit unterhalb des Maximums der Planck'schen Strahlungskurve ist die spektrale Strahlungsflussdichte in einem bestimmten Frequenzintervall also proportional zur Temperatur T . (Man beachte die Analogie zur Nyquist-Formel für die thermische Rauschleistung.)

Umgekehrt kann man für $h\nu \gg k_B T$ den Summanden -1 im Nenner vernachlässigen und erhält das *Wien'sche Strahlungsgesetz*.

$$M_\nu d\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} d\nu$$

Natürlich sind entsprechende Näherungen auch möglich, wenn das Planck'sche Strahlungsgesetz als Funktion der Wellenlänge angegeben wird.

$$M_\lambda d\lambda = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4} \quad \text{für} \quad \frac{hc}{\lambda} \ll k_B T$$

$$M_\lambda d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda k_B T}} \quad \text{für} \quad \frac{hc}{\lambda} \gg k_B T$$

Aus den Gesetzen ist unmittelbar ersichtlich, dass die Strahlungsflussdichte für $\nu \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$) und für $\nu \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow 0$) gegen Null geht. Beide Gesetze waren schon längere Zeit bekannt, bevor sie sich als Grenzfälle des Planck'schen Strahlungsgesetzes ergaben.

2.7.5 Wien'sches Verschiebungsgesetz

Wir wollen nun untersuchen, bei welcher Frequenz die von einem schwarzen Körper ausgehende Strahlungsflussdichte maximal ist. Dazu berechnen wir zunächst ihre Ableitung nach der Frequenz.

$$\begin{aligned} \frac{dM_\nu}{d\nu} &= \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{3\nu^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1} - \frac{\nu^3}{(e^{h\nu/k_B T} - 1)^2} e^{h\nu/k_B T} \frac{h}{k_B T} \right) \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{\nu^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \right) \left(3 - \frac{h\nu}{k_B T} \frac{1}{1 - e^{-h\nu/k_B T}} \right) \end{aligned}$$

Diese Ableitung müssen wir nun gleich Null setzen. Da die Strahlungsflussdichte stets größer gleich Null ist und für $\nu \rightarrow 0$ und $\nu \rightarrow \infty$ Null erreicht, erwarten wir ein Maximum bei einem endlichen Wert von ν . Wir müssen also die Nullstellen der dritten Klammer untersuchen. Mit der Substitution $x_\nu := \frac{h\nu}{k_B T}$ kann man dies schreiben als

$$3 - \frac{x_\nu}{1 - e^{-x_\nu}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - 3e^{-x_\nu} \stackrel{!}{=} x_\nu$$

Diese Gleichung hat im Intervall $x_\nu \in (0, \infty)$ genau eine Lösung, deren Wert sich numerisch zu $\tilde{x}_\nu \approx 2.8214$ ergibt. Daraus erhält man dann das Wien'sche Verschiebungsgesetz

$$\nu_{\max} = C \cdot T \quad \text{mit} \quad C = \frac{k}{h} \tilde{x}_\nu$$

Man kann nun auch die Strahlungsflussdichte als Funktion der Wellenlänge untersuchen. Anders als man vielleicht naiv erwarten würde, liegt ihr Maximum λ_{\max} *nicht* bei $\frac{c}{\nu_{\max}}$. Dies liegt daran, dass sich auch das Einheits-Wellenlängenintervall $d\lambda$ gegenüber dem Einheits-Frequenzintervall $d\nu$ verändert. Berechnet man wieder die Nullstelle der Ableitung $\frac{dM_\lambda}{d\lambda}$, so erhält man

$$\lambda_{\max} = C \cdot \frac{1}{T} \quad \text{mit} \quad C = \frac{hc}{k} \frac{1}{\tilde{x}_\lambda}$$

wobei sich \tilde{x}_λ als Lösung der Gleichung $x_\lambda \stackrel{!}{=} 5(1 - e^{-x_\lambda})$ ergibt. Numerisch gilt $\tilde{x}_\lambda \approx 4.9651$. Aus dem oben gesagten folgt insbesondere

$$\lambda_{\max} = \frac{\tilde{x}_\nu}{\tilde{x}_\lambda} \cdot \frac{c}{\nu_{\max}}$$

wobei $\frac{\tilde{x}_\nu}{\tilde{x}_\lambda} \approx 0.5683$.

2.7.6 Stefan-Boltzmann-Gesetz

Man kann sich nun noch die Frage stellen, welche Leistung ein schwarzer Körper der Temperatur T insgesamt abstrahlt. Dazu müssen wir die spektrale Strahlungsflussdichte über die gesamte Oberfläche des schwarzen Körpers und über alle Frequenzen integrieren. Die Integration über die Oberfläche A ist trivial, da die Strahlungsflussdichte überall gleich ist. So erhält man

$$\begin{aligned} P &= A \int_0^\infty d\nu M_\nu = \frac{2\pi h}{c^2} A \int_0^\infty d\nu \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} A \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} \\ &= \frac{2\pi k_B^4}{h^3 c^2} T^4 \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} \\ &=: \sigma A T^4 \end{aligned}$$

Dies ist das sog. *Stefan-Boltzmann-Gesetz* (nach Josef Stefan und Ludwig Boltzmann). Man kann zeigen, dass für das in der Stefan-Boltzmann-Konstanten σ auftauchende Integral gilt

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

(siehe die Lösung zu Aufgabe 11.2.5 in D. Meschede: Gerthsen Physik (21. Auflage), Springer Verlag). Damit ergibt sich die Stefan-Boltzmann-Konstante als

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$$

2.8 Hot-Cold-Methode

Nach dem oben gesagten gilt für die empfangene Rauschleistung $P = cT$ mit einer Proportionalitätskonstanten c . Dabei setzt sich die Gesamttauschtemperatur aus der Empfängerrauschtemperatur T_R und der Antennentemperatur T_A zusammen. Will man aus einer gemessenen Rauschleistung und Antennentemperatur die Empfängerrauschtemperatur zu bestimmen, so hat man mit c und T_R nun also zwei Unbekannte.

Die Idee hinter der *Hot-Cold-* oder *Y-Faktor-Methode* besteht nun darin, die Rauschleistung für zwei verschiedene Antennentemperaturen $T_A = T_H$ und $T_A = T_C$ zu messen.

So erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\begin{aligned} P_H &= c(T_R + T_H) \\ P_C &= c(T_R + T_C) \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich sofort

$$T_R = \frac{T_H - YT_C}{Y - 1}$$

wobei der sog. Y-Faktor $Y := \frac{P_H}{P_C}$ eingeführt wurde. Wenn man zusätzlich an der Konstanten c interessiert ist, so kann man das Gleichungssystem auch nach dieser auflösen und erhält

$$c = \frac{P_H - P_C}{T_H - T_C}$$

Die Hot-Cold-Methode funktioniert offenbar auch, wenn man eine Größe misst, die lediglich proportional zur empfangenen Rauschleistung ist. Die Proportionalitätskonstanten multiplizieren sich dann einfach.

Da wir die Hot-Cold-Methode letztlich verwenden werden, um die Empfängerrauschtemperatur aus experimentell bestimmten, fehlerbehafteten Größen zu bestimmen, wollen wir an dieser Stelle noch kurz auf die Fehler der ermittelten Größen eingehen. Mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung erhalten wir die Fehler

$$\begin{aligned} \Delta Y &= Y \sqrt{\left(\frac{\Delta P_H}{P_H}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P_C}{P_C}\right)^2} \\ \Delta T_R &= \sqrt{\left(\frac{T_H - T_C}{(Y - 1)^2} \Delta Y\right)^2 + \left(\frac{1}{Y - 1} \Delta T_H\right)^2 + \left(\frac{Y}{Y - 1} \Delta T_C\right)^2} \\ \Delta c &= c \sqrt{\left(\frac{\Delta P_H}{P_H - P_C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P_C}{P_H - P_C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T_H}{T_H - T_C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T_C}{T_H - T_C}\right)^2} \end{aligned}$$

2.9 Gesamtrauschtemperatur einer Verstärkerkette

Wir wollen nun die Hintereinanderschaltung mehrerer Bauteile untersuchen, die jeweils das Eingangssignal um einen Faktor G verstärken oder abschwächen, aber auch selber rauschen. Da das Rauschen unkorreliert ist, addieren sich die Rauschleistungen.

Wir bezeichnen die Rauschleistung hinter dem i ten Glied der Kette mit P_i^* . P_i^* setzt sich zusammen aus der Rauschleistung der vorhergehenden Glieder, P_{i-1}^* , und der Eigenrauschleistung des betrachteten Glieds, P_i . Beide werden noch um einen Faktor G_i (der Verstärkungsfaktor des betrachteten Glieds) verstärkt. Wir erhalten also

$$P_i^* = G_i(P_{i-1}^* + P_i)$$

Betrachten wir nun eine Kette aus insgesamt N Gliedern, die eine Eingangsrauschleistung P_0 zugeführt bekommt, so gilt für die Gesamtrauschleistung also

$$P_N^* = G_1 \cdots G_N P_0 + G_1 \cdots G_N P_1 + G_2 \cdots G_N P_2 + \dots + G_{N-1} G_N P_{N-1} + G_N P_N$$

Den Rauschleistungen P_i der einzelnen Glieder können wir nun jeweils eine Rauschtemperatur T_i zuordnen, wobei die Temperatur der Rauschleistung proportional ist. Die Proportionalitätskonstante c soll sich dabei auf das Verhältnis von Eingangstemperatur zur Rauschleistung am Ausgang beziehen, d.h. für eine komplett rauschfreie Kette mit $P_N^* = G_1 \cdots G_N P_0$ soll gelten

$$T_N^* \stackrel{!}{=} cP_0$$

also

$$T_N^* = \frac{c}{G_1 \cdots G_N} P_N^*$$

Betrachten wir nun wieder die normale Kette mit rauschenden Gliedern, so erhalten wir

$$\begin{aligned} T_N^* &= \frac{c}{G_1 \cdots G_N} P_N^* \\ &= \frac{c}{G_1 \cdots G_N} (G_1 \cdots G_N P_0 + G_1 \cdots G_N P_1 + G_2 \cdots G_N P_2 + \dots + G_{N-1} G_N P_{N-1} + G_N P_N) \\ &= cP_0 + cP_1 + \frac{1}{G_1} cP_2 + \dots + \frac{1}{G_1 \cdots G_{N-2}} cP_{N-1} + \frac{1}{G_1 \cdots G_{N-1}} cP_N \\ &= T_0 + T_1 + \frac{T_2}{G_1} + \dots + \frac{T_{N-1}}{G_1 \cdots G_{N-2}} + \frac{T_N}{G_1 \cdots G_{N-1}} \end{aligned}$$

Aus dem Gesagten folgt sofort, dass für den Ausbau eines rauscharmen Radiometers die Rauschfreiheit der ersten Stufen am Wichtigsten ist.

Wir betrachten nun bei einem Radiometer den Mischer als erste Stufe mit einer Eigenrauschteperatur $T_M := T_1$ und fassen die restlichen Komponenten zu einer zweiten Stufe mit einer Eigenrauschteperatur $T_{ZF} := T_2$ zusammen. Für die Eigenrauschteperatur $T_R := T_2^* - T_0$ dieses Radiometers gilt dann

$$T_R = T_M + LT_{ZF}$$

wobei wir den *Mischverlust* $L := \frac{1}{G_1}$ eingeführt haben.

2.10 Radiometerformel

Wir wollen nun diskutieren, wie die kleinste noch nachweisbare Antennentemperatur mit der Eigenrauschteperatur des Empfängers zusammenhängt. Der prinzipielle Grund für einen solchen Zusammenhang ist, dass, da das Rauschen ja statistisch ist, es irgendwann nicht mehr möglich ist, zwischen zufälligen Schwankungen im Eigenrauschen des Empfängers und einem Signal von der Antenne zu unterscheiden.

Wir betrachten einen Empfänger, der aus einem Bandpassfilter mit einer Durchlassbandbreite $\Delta\nu$, einem Verstärker, einem Detektor und einem Integrator besteht. Der Detektor hat dabei die Aufgabe, ein der momentan empfangenen Rauschleistung proportionales Signal zu liefern, welches dann vom Integrator integriert wird, um kurzfristige Schwankungen herauszufiltern. Das System habe eine Systemrauschteperatur T_{sys} . Da die Rauschleistung zufällig ist, bleiben trotz des Integrators noch Schwankungen im Ausgangssignal übrig. Wir definieren die Nachweisgrenze ΔT als ein Eingangssignal, welches

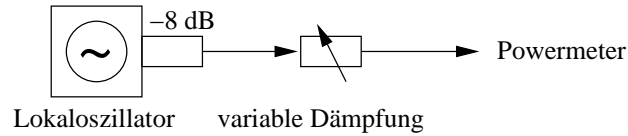


Abbildung 2: Aufbau zu Aufgabe 1

am Empfängerausgang eine Spannung erzeugt, die genau so groß ist wie die statistischen Schwankungen aufgrund des Systemrauschens und daher gerade nicht mehr von diesen unterschieden werden kann. Die Nachweisgrenze kann nun auf drei Arten verbessert werden:

- durch Verringerung der Systemrauschtemperatur
- durch Erhöhung der Bandpass-Bandbreite $\Delta\nu$ (denn dies verringert die Zeitspanne zwischen unkorrelierten Rauschbeiträgen, die dazu neigen, sich wegzuheben)
- durch Erhöhung der Integrationszeit τ (denn je mehr Rauschen aufintegriert wird, desto kleiner werden die Schwankungen)

Dieser Zusammenhang kommt in der sog. *Radiometerformel* zum Ausdruck

$$\Delta T = \frac{T_{sys}}{\sqrt{\tau \Delta\nu}}$$

die in dieser Form für einen sog. *idealen Integrator* (d.i. ein Tiefpass mit exakt rechteckiger Frequenzcharakteristik) gilt.

Wir wollen auf eine präzise Ableitung der Radiometerformel an dieser Stelle verzichten und verweisen auf die Literatur (O. Hachenberg und B. Vowinkel, *Technische Grundlagen der Radioastronomie*). Man kann sich die Formel jedoch folgendermaßen plausibel machen: Pro Zeiteinheit erzeugt der Bandpassfilter $\Delta\nu$ statistisch unabhängige Rauschbeiträge. Während der Integrationszeit τ werden davon insgesamt $\tau \Delta\nu$ Stück aufsummiert. Der relative Fehler $\frac{\Delta x}{x}$, den man beim Aufsummieren von n statistisch unabhängigen Messungen macht, ist gegeben durch $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Wir können die Systemrauschtemperatur also mit einem relativen Fehler von

$$\frac{\Delta T}{T_{sys}} = \frac{1}{\sqrt{\tau \Delta\nu}}$$

messen. Dieser Fehler entspricht aber gerade der Nachweisgrenze.

3 Auswertung

3.1 Kalibration des variablen Dämpfungsglieds

Zur Kalibration des variablen Dämpfungsglieds wurde zunächst die Oszillatorleistung mit vollständig geöffnetem Dämpfungsglied (0 SKT) bestimmt ($P_0 = (5.53 \pm 0.02)$ mW).

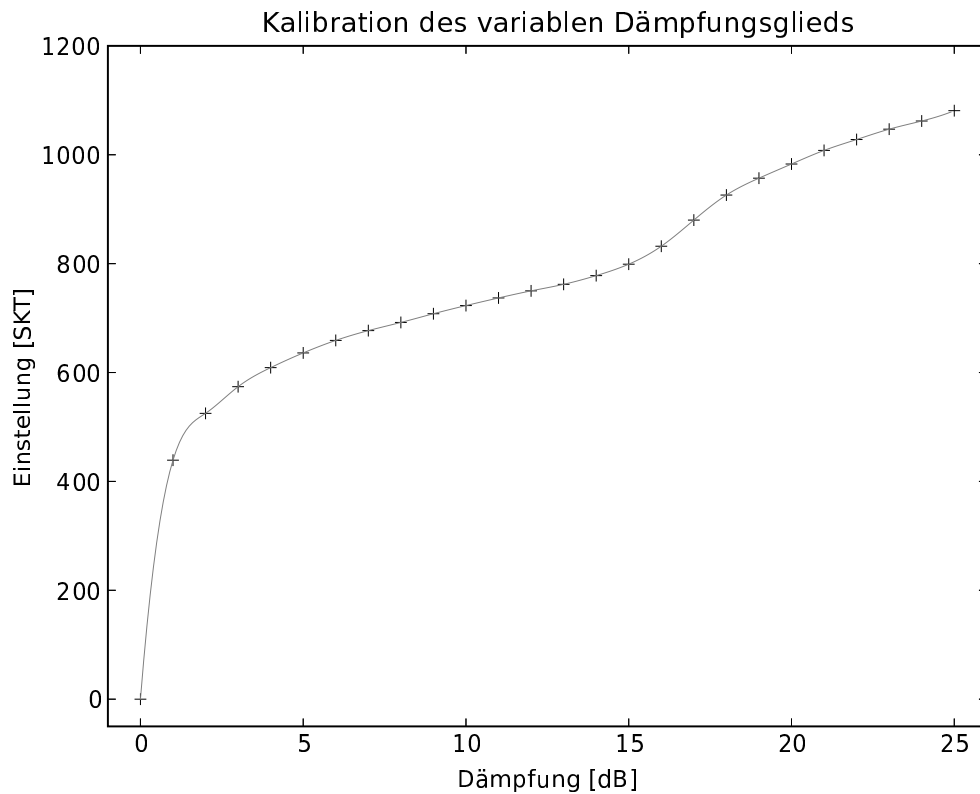


Abbildung 3: Einstellung des Dämpfungsglieds für verschiedene Dämpfungen (die durchgezogene Linie ist eine Interpolation mittels eines kubischen Splines)

Anschließend wurden die Leistungen für -1 dB bis -25 dB Dämpfung nach der Formel

$$P = P_0 \cdot 10^{d/10}$$

berechnet (dabei ist d die Dämpfung in dB) und das Dämpfungsglied so eingestellt, dass die entsprechende Leistung noch am Messgerät ankam.

In Abb.3 und Tab.1 sind die Ergebnisse der Kalibration dargestellt. Man beachte insbesondere den stark nichtlinearen Verlauf der Kurve.

3.2 Bestimmung der Empfängerrauschtemperatur

Wir wollen nun die Rauschtemperatur des Empfängers in Abhängigkeit von der Lokaloszillatorleistung mit Hilfe der Hot-Cold-Methode bestimmen. Anstelle von thermischem Rauschen benutzen wir hierbei als Rauschquelle eine sog. Rauschdiode. Die äquivalente Rauschtemperatur dieser Diode wird über das sog. *excess noise ratio* angegeben, welches

Dämpfung [dB]	Leistung [mW]	Einstellung [SKT]
0	5.53 ± 0.02	0.0 ± 0.5
1	4.39 ± 0.02	439.0 ± 0.5
2	3.49 ± 0.02	525.0 ± 0.5
3	2.77 ± 0.02	574.0 ± 0.5
4	2.20 ± 0.02	609.0 ± 0.5
5	1.75 ± 0.02	636.0 ± 0.5
6	1.39 ± 0.02	659.0 ± 0.5
7	1.10 ± 0.02	677.0 ± 0.5
8	0.876 ± 0.002	692.0 ± 0.5
9	0.696 ± 0.002	708.0 ± 0.5
10	0.553 ± 0.002	723.0 ± 0.5
11	0.439 ± 0.002	737.0 ± 0.5
12	0.349 ± 0.002	750.0 ± 0.5
13	0.277 ± 0.002	762.0 ± 0.5
14	0.220 ± 0.002	778.0 ± 0.5
15	0.175 ± 0.002	799.0 ± 0.5
16	0.139 ± 0.002	832.0 ± 0.5
17	0.110 ± 0.002	880.0 ± 0.5
18	0.0876 ± 0.0002	926.0 ± 0.5
19	0.0696 ± 0.0002	957.0 ± 0.5
20	0.0553 ± 0.0002	983.0 ± 0.5
21	0.0439 ± 0.0002	1008.0 ± 0.5
22	0.0349 ± 0.0002	1028.0 ± 0.5
23	0.0277 ± 0.0002	1047.0 ± 0.5
24	0.0220 ± 0.0002	1062.0 ± 0.5
25	0.0175 ± 0.0002	1081.0 ± 0.5

Tabelle 1: Einstellung des Dämpfungsglieds für verschiedene Dämpfungen

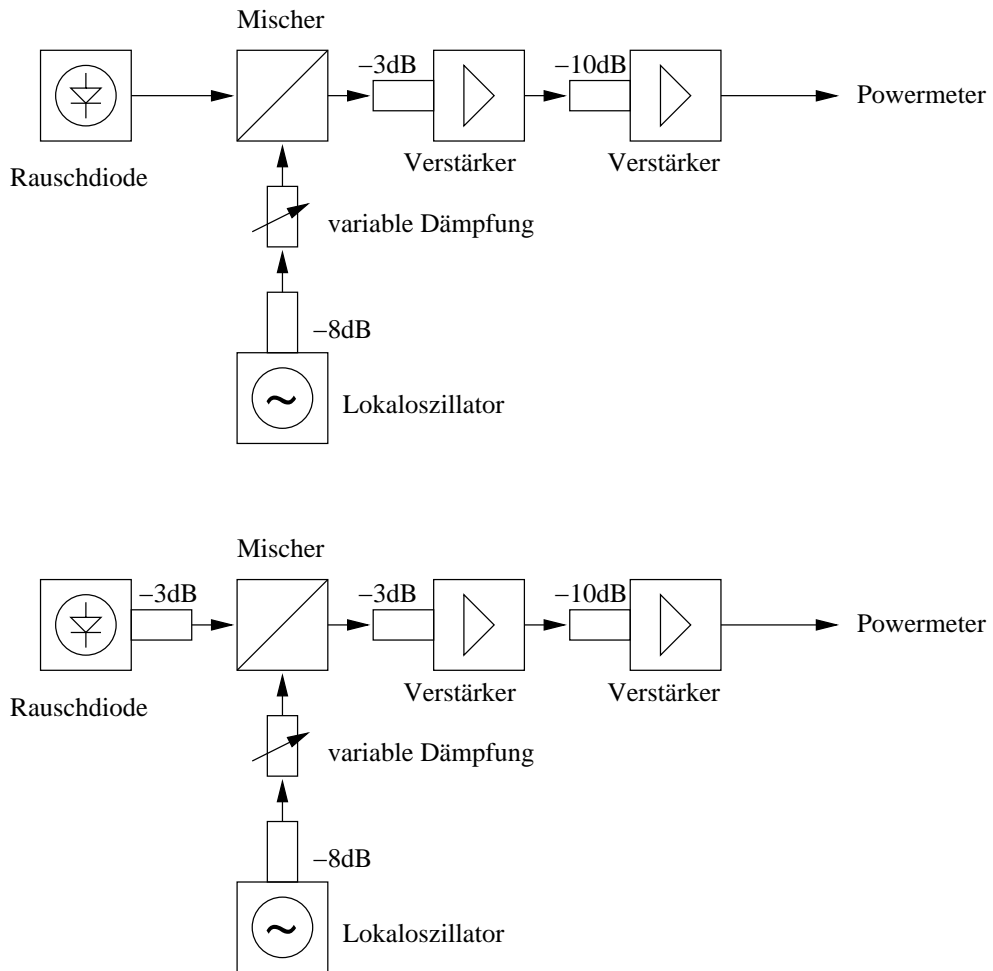


Abbildung 4: Aufbau zu Aufgabe 2: Bestimmung von T_H (oben) und T_C (unten)

folgendermaßen definiert ist:

$$\text{enr/dB} = 10 \log \left(\frac{T_E}{T_0} \right)$$

Dabei ist T_E die äquivalente Rauschtemperatur der Quelle und $T_0 := 293 \text{ K}$ die Standard-Raumtemperatur (entspricht ca. $20 \text{ }^\circ\text{C}$). Da das Rauschspektrum der Diode nicht exakt einem Schwarzkörperspektrum entspricht, muss enr immer bei einer bestimmten Frequenz angegeben werden.

Für das Hot-Cold-Verfahren brauchen wir nun zwei Rauschtemperaturen. Für die heiße Messung verwenden wir einfach die Rauschdiode, während wir für die kalte Messung ein zusätzliches Dämpfungsglied einfügen, welches die Rauschleistung entsprechend abschwächt. (Natürlich stellt das Dämpfungsglied auch selber wieder eine Rauschquelle dar. Diesen Fehler wollen wir hier vernachlässigen.)

Für die von uns verwendete Rauschdiode beträgt enr laut Anleitung:

$$\text{enr} = +15.1 \text{ dB @ } 10 \text{ GHz}$$

Zur Dämpfung verwenden wir ein 3-dB-Dämpfungsglied. Damit erhalten wir:

$$T_H = T_0 \cdot 10^{1.51} = 9481 \text{ K}$$

$$T_C = T_0 \cdot 10^{1.21} = 4752 \text{ K}$$

Wir bestimmen nun die Empfängerrauschtemperatur in Abhängigkeit von der Dämpfung des Lokaloszillators. Dazu verwenden wir die Hot-Cold-Methode. Laut Vorbereitung gilt

$$Y = \frac{P_H}{P_C} ; T_R = \frac{T_H - Y T_C}{Y - 1}$$

Zur Bestimmung der Fehler von Y und T_R nehmen wir $\Delta T_H = \Delta T_C = 0$ an und verwenden die in der Vorbereitung angegebene Fehlerformel.

Die Ergebnisse der Messung sind in Abb. 5 und Tab. 2 dargestellt. Man erkennt, dass die Rauschtemperatur des Empfängers für 4 dB Lokaloszillator-Dämpfung minimal ist.

3.3 Bestimmung der ZF-Rauschtemperatur

Wir wollen nun die Rauschtemperatur der ZF-Verstärkerkette bestimmen. Dazu nutzen wir wieder die Rauschdiode. Der Aufbau ist in Abb. 6 gezeigt.

Wir führen drei Messungen durch: zunächst messen wir die Rauschtemperatur der ZF-Verstärker-Kette alleine, dann fügen wir ein Bandpaßfilter einmal vor und einmal hinter den Verstärkern ein (Position 1 bzw. Position 2 in der Abbildung). Mit denselben Formeln wie im vorherigen Abschnitt erhalten wir:

	P_C [mW]	P_H [mW]	Y	T_R [K]
ohne Bandpaß	0.545 ± 0.001	0.964 ± 0.001	1.769 ± 0.004	1400 ± 30 (2%)
Bandpaß vor ZF	0.274 ± 0.001	0.438 ± 0.001	1.599 ± 0.007	3150 ± 100 (3%)
Bandpaß hinter ZF	0.202 ± 0.001	0.359 ± 0.001	1.777 ± 0.011	1330 ± 80 (6%)

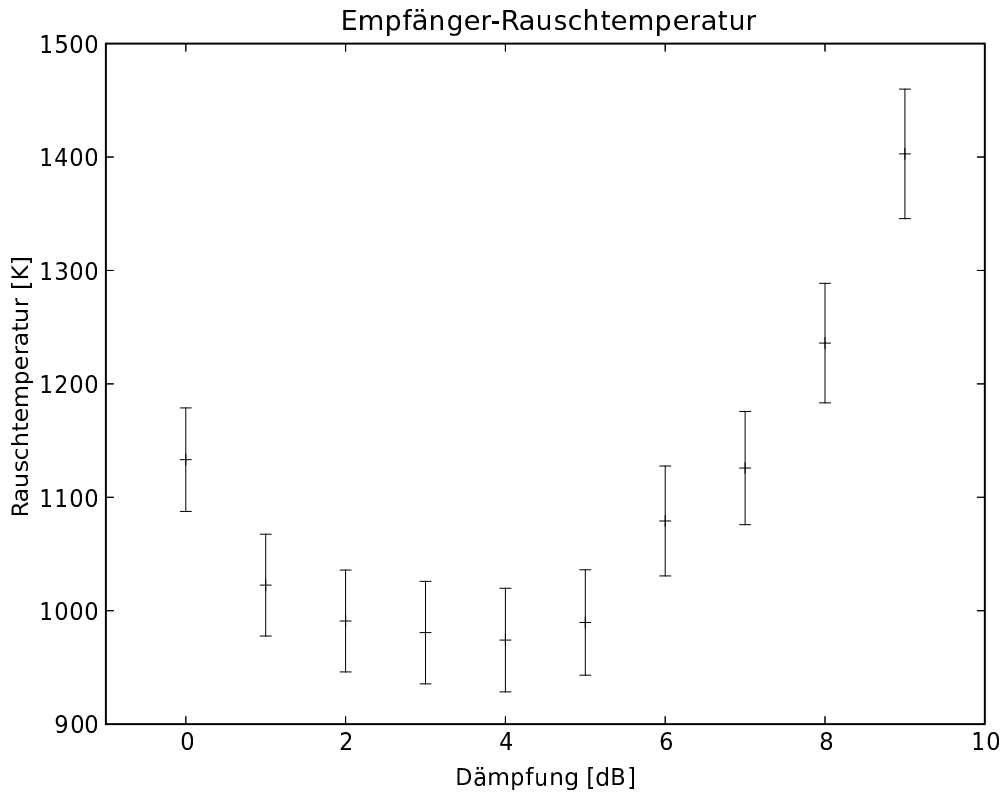


Abbildung 5: Empfänger-Rauschtemperatur in Abhängigkeit von der Lokaloszillator-Dämpfung

Dpfg. [dB]	P_C [mW]	P_H [mW]	Y	T_R [K]
0	0.331 ± 0.001	0.597 ± 0.001	1.804 ± 0.007	1130 ± 50
1	0.326 ± 0.001	0.593 ± 0.001	1.819 ± 0.007	1020 ± 50
2	0.323 ± 0.001	0.589 ± 0.001	1.824 ± 0.007	990 ± 50
3	0.320 ± 0.001	0.584 ± 0.001	1.825 ± 0.007	980 ± 50
4	0.316 ± 0.001	0.577 ± 0.001	1.826 ± 0.007	970 ± 50
5	0.312 ± 0.001	0.569 ± 0.001	1.824 ± 0.007	990 ± 50
6	0.307 ± 0.001	0.556 ± 0.001	1.811 ± 0.007	1080 ± 50
7	0.302 ± 0.001	0.545 ± 0.001	1.805 ± 0.007	1130 ± 50
8	0.295 ± 0.001	0.528 ± 0.001	1.790 ± 0.007	1240 ± 60
9	0.285 ± 0.001	0.504 ± 0.001	1.768 ± 0.008	1400 ± 60

Tabelle 2: Empfänger-Rauschtemperatur in Abhängigkeit von der Lokaloszillator-Dämpfung

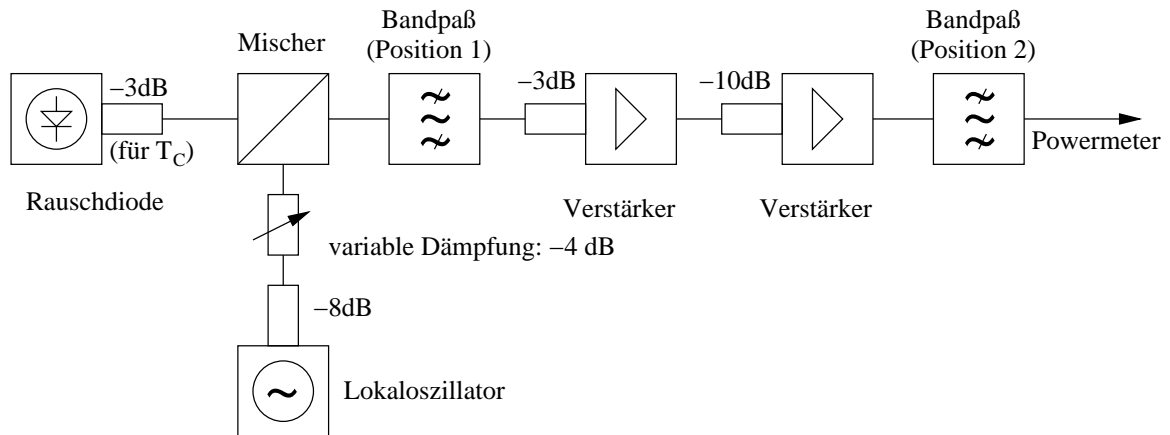


Abbildung 6: Bestimmung der ZF-Rauschtemperatur

Man erkennt, dass der Bandpaßfilter vor der Verstärkerkette die Rauschtemperatur erhöht, während er hinter ihr die Rauschtemperatur innerhalb der Fehlergrenzen konstant läßt. Der Grund dafür liegt darin, dass der Bandpaßfilter selber Rauschen produziert. Platziert man ihn vor dem Verstärker, so wird das Rauschen des Bandpaßfilters vom Verstärker mitverstärkt und taucht zusätzlich am Ausgang auf. Platziert man hingegen hinter dem Verstärker ($G = 67$ dB!), so ist das Ausgangssignal des Verstärkers so groß, dass man das Rauschen des Bandpaßfilters dagegen völlig vernachlässigen kann. Für den Betrieb des Radiometers ist also eine Platzierung des Bandpaßfilters hinter dem Verstärker zu empfehlen, da man das Rauschen so klein wie möglich halten will.

3.4 Bestimmung des Mischverlusts L

Zur Bestimmung des Mischverlustes benutzen wir die bei den theoretischen Grundlagen erklärte Formel für die Empfänger-Rauschtemperatur

$$T_R = T_M + L \cdot T_{ZF}$$

wobei T_M die Rauschtemperatur des Mixers, L der Mischverlust und T_{ZF} die Zwischenfrequenz-Rauschtemperatur ist. Wir erhöhen nun systematisch die ZF-Rauschtemperatur durch Einbau zusätzlicher Dämpfungsglieder (0...-5 dB) und messen jeweils Wertepaare (T_{ZF}, T_R), die gemäß der Formel dann auf einer Geraden mit Steigung L und y-Achsenabschnitt T_M liegen sollten (Aufbau gemäß Abb. 7). Die Resultate sind in der folgenden Tabelle und in Abb. 8 dargestellt.

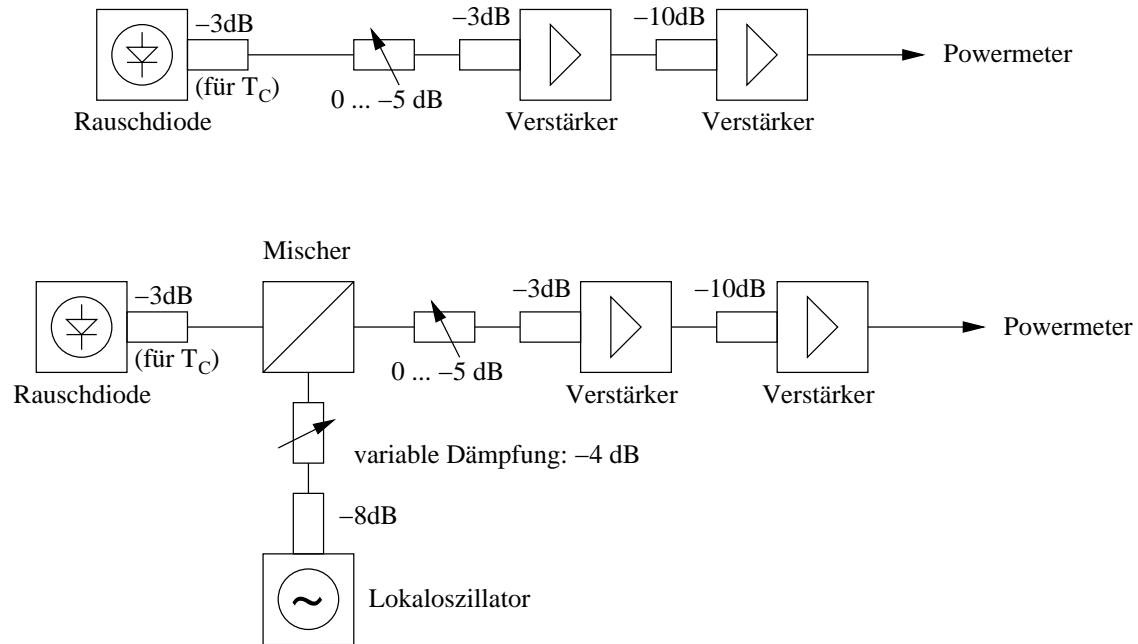


Abbildung 7: Aufbau zur Bestimmung des Mischverlusts: Bestimmung der Zwischenfrequenz-Rauschtemperatur (oben) und der Empfänger-Rauschtemperatur (unten)

Dämpfung [dB]	ZF-Rauschtemperatur			Empfänger-Rauschtemperatur		
	P_C [mW]	P_H [mW]	T_R [K]	P_C [mW]	P_H [mW]	T_R [K]
0	0.458	0.834	1010 ± 40	0.292	0.555	500 ± 50
1	0.399	0.721	1110 ± 40	0.241	0.409	2030 ± 80
2	0.326	0.578	1370 ± 50	0.205	0.340	2430 ± 110
3	0.278	0.474	1960 ± 70	0.175	0.295	2150 ± 120
4	0.246	0.414	2170 ± 90	0.156	0.256	2630 ± 150
5	0.209	0.337	2970 ± 120	0.147	0.212	5900 ± 300

$$\Delta P_C = \Delta P_H = 0.001 \text{ mW}$$

Eine rechnerische Geradenanpassung an die Meßwerte (ohne Berücksichtigung der unterschiedlich großen Fehler) liefert:

$$L = 2.1 \pm 0.6 \text{ (28\%)}$$

$$T_R = (-1100 \pm 1100) \text{ K (97\%)}$$

Betrachtet man die Abweichung der gemessenen Werte von der angepaßten Geraden, so fällt auf, dass die angegebenen Fehler offenbar viel zu klein sind. Die Annahme, dass der Fehler der Leistungsmessung ungefähr in der Größenordnung des Ablesefehlers liegt ($\Delta P = 0.001 \text{ mW}$ entspricht 1 LSD), ist also aufgrund der thermischen Drift des

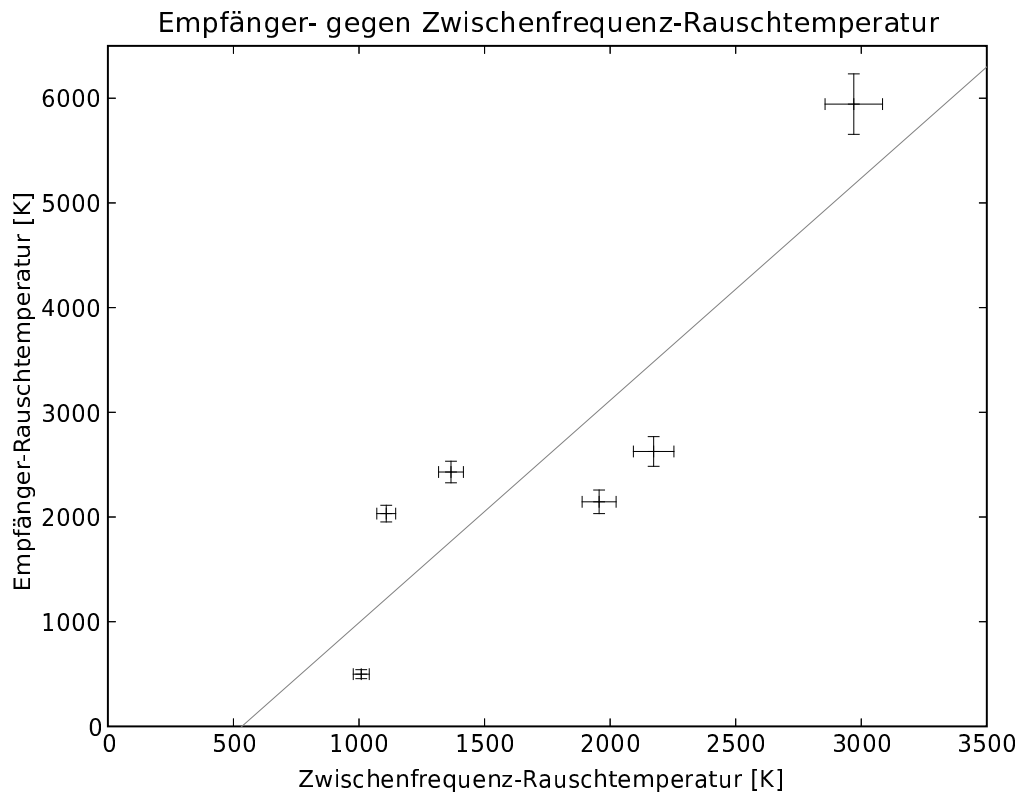


Abbildung 8: Messung zur Bestimmung des Mischverlusts L

Powermeters wohl nicht richtig. Dies bedeutet natürlich, dass auch die Fehler der anderen in diesem Versuch ermittelten Meßgrößen zu klein abgeschätzt sind.

Die Rauschtemperatur T_M des Mischers ist innerhalb der Fehlergrenzen mit Null verträglich. Wir können also nur sagen, dass sie zu klein ist, um aus der Messung verlässlich ermittelt werden zu können. Der Wert für den Mischverlust L erscheint plausibel.

3.5 Bestimmung der Empfängerrauschtemperatur mit Hornantenne und Abschlußwiderstand

Als letzte Aufgabe wollen wir nun nochmals die Empfängerrauschtemperatur bestimmen, diesmal jedoch nicht mit der Rauschdiode, sondern mit „echtem“ thermischen Rauschen (Aufbau siehe Abb. 9). Zu diesem Zweck verwenden wir einmal einen Widerstand, den wir wahlweise auf Raum- oder auf Flüssigstickstofftemperatur bringen, und einmal die thermische Abstrahlung eines Absorbers, der ebenfalls entweder auf Raum- oder auf

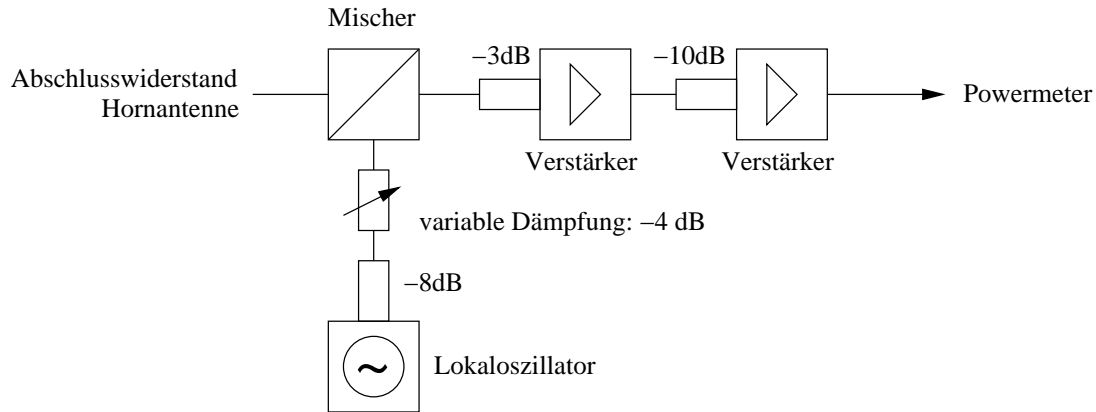


Abbildung 9: Bestimmung der Empfängerrauschtemperatur mit thermischem Rauschen

Flüssigstickstofftemperatur gebracht wird. Die Temperaturen T_H und T_C sind nun also:

$$T_H = (26.0 \pm 0.5) \text{ }^\circ\text{C} = (299.1 \pm 0.5) \text{ K}$$

$$T_C = (77.0 \pm 1.0) \text{ K}$$

Bei der Berechnung der Rauschtemperatur müssen wir diesmal die Fehler ΔT_H und ΔT_C in der Fehlerrechnung berücksichtigen. Wir erhalten dann:

	P_C [μW]	P_H [μW]	Y	T_R [K]
Abschlußwiderstand	95.3 ± 0.5	102.0 ± 1.0	1.070 ± 0.012	3100 ± 600 (19%)
Antenne	97.4 ± 0.2	102.2 ± 0.2	1.049 ± 0.003	4400 ± 300 (7%)

Zu diesen Werten ist zweierlei anzumerken. Zunächst einmal sind sie innerhalb der (recht großen) Fehlergrenzen ungefähr gleich, wie man auch erwarten würde — die Empfänger-Rauschtemperatur sollte nicht von der Meßmethode abhängen. Andererseits erkennen wir einen deutlichen Unterschied zu der mit der Rauschdiode ermittelten Rauschtemperatur ($T_R = (970 \pm 50) \text{ K}$, ebenfalls bei 4 dB Lokaloszillatordämpfung). Der Grund hierfür liegt vermutlich in der zusätzlichen Verwendung des flexiblen SMA-Koaxialkabels.

Zum einen stellen dieses Kabel, vor allem aber die Verbindungen an beiden Seiten, elektrische Widerstände dar, die ja bekanntlich ebenfalls Rauschen produzieren. Diese Rauschtemperaturen addieren sich zur Rauschtemperatur des Empfängers. Wir erkennen hier, wie wichtig es in der Mikrowellentechnik ist, auf einwandfreie elektrische Verbindungen zu achten. Dies ist auch der Grund, weshalb die Verbindungsstecker vergoldet sind. (Kupfer würde zwar noch besser leiten, neigt aber bei Kontakt mit Feuchtigkeit leicht zur Oxidation. Gold hingegen leitet ebenfalls relativ gut, korrodiert aber praktisch nicht.)

Es ist jedoch sehr unwahrscheinlich, dass die Widerstände im Kabel alleine die enorme Abweichung zwischen den Werten erklären können. Der Hauptteil der Abweichung wird vermutlich dadurch verursacht, dass das Kabel zur Entstehung unerwünschter elektrischer Schwingungen in unserem Aufbau geführt hat, die dann die Messung verfälscht haben.

4 Anhang

4.1 Rechnung für die Mischerformel

$$\begin{aligned} I(U_0 + \delta U) &= k_0 + k_1(A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_S t)) \\ &\quad + k_2 (A^2 \sin^2(\omega_{LO}t) + B^2 \sin^2(\omega_S t) + 2AB \sin(\omega_{LO}t) \sin(\omega_S t)) + \mathcal{O}(\delta U^3) \\ &= k_0 + k_1(A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_S t)) \\ &\quad + k_2 \left(\frac{A^2}{2} \sin^2(\omega_{LO}t) + \frac{B^2}{2} \sin^2(\omega_S t) + \frac{A^2}{2}(1 - \cos^2(\omega_{LO}t)) + \frac{B^2}{2}(1 - \cos^2(\omega_S t)) \right) \\ &\quad + 2k_2 AB \sin(\omega_{LO}t) \sin(\omega_S t) + \mathcal{O}(\delta U^3) \\ &= k_0 + k_1(A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_S t)) \\ &\quad + k_2 \left(\frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A^2}{2} (\sin^2(\omega_{LO}t) - \cos^2(\omega_{LO}t)) + \frac{B^2}{2} (\sin^2(\omega_S t) - \cos^2(\omega_S t)) \right) \\ &\quad + 2k_2 AB \sin(\omega_{LO}t) \sin(\omega_S t) + \mathcal{O}(\delta U^3) \\ &= k_0 + k_1(A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_S t)) \\ &\quad + k_2 \left(\frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(2\omega_{LO}t) + \frac{B^2}{2} \cos(2\omega_S t) \right) \\ &\quad + k_2 AB (\cos(\omega_{LO}t) \cos(\omega_S t) + \sin(\omega_{LO}t) \sin(\omega_S t)) \\ &\quad - k_2 AB (\cos(\omega_{LO}t) \cos(\omega_S t) - \sin(\omega_{LO}t) \sin(\omega_S t)) \\ &\quad + \mathcal{O}(\delta U^3) \\ &= k_0 + k_1(A \sin(\omega_{LO}t) + B \sin(\omega_S t)) \\ &\quad + k_2 \left(\frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(2\omega_{LO}t) + \frac{B^2}{2} \cos(2\omega_S t) \right) \\ &\quad + k_2 AB \cos((\omega_{LO} - \omega_S)t) - k_2 AB \cos((\omega_{LO} + \omega_S)t) + \mathcal{O}(\delta U^3) \end{aligned}$$